THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Понеделник, 2 юли 1979

Време за работа 4 часа.

(1) Нека p и q са естествени числа, такива че

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Да се докаже, че p се дели на 1979.

(2) Дадена е петоъгълна призма с основи $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Ръбовете на двете основи и отсечките A_iB_j за всички $i,j = 1, 2, 3, 4, 5$ са оцветени или в червено, или в зелено, така че във всеки триъгълник с върхове във върховете на призмата, всичките страни на който са оцветени, има две страни с различен цвят. Да се докаже, че всичките десет ръба на двете основи са оцветени с един и същ цвят.

(3) В равнината са дадени две пресичащи се окръжности c_1 и c_2. Нека A е една от техните пресечни точки. От A едновременно започват да се движат две точки M_1 и M_2 съответно по окръжностите c_1 и c_2. Точките M_1 и M_2 се движат с постоянна скорост по посока на часовниковата стрелка. След една обиколка двете точки едновременно се завръщат в точка A. Да се докаже, че в равнината съществува неподвижна точка P, такава, че разстоянията от P до M_1 и M_2 са равни във всеки момент на движението.

THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Вторник, 3 юли 1979 г.

Време за работа 4 часа.

(4) Дадени са равнина π, точка P в π и точка Q вън от π. Да се намерят всички точки R в равнината π, за които частното $(QP + PR)/QR$ е максимално.

(5) Да се намерят всички реални числа a, за които съществуват реални неотрицателни числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, удовлетворяващи условията :

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3 .$$

(6) Нека A и E са два противоположни върха на правилен осмоъгълник. В точката A се намира кенгуру. От всеки връх на осмоъгълника освен върха E кенгуруто може да скочи във всеки от двата съседни върха. Ако скочи във върха E, кенгуруто престава да се движи. Нека a_n е броят на начините, по които кенгуруто може да премине от точката A в точката E точно с n скока. Да се докаже,че $a_{2n-1} = 0$,

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x^{n-1} - y^{n-1}),\ n = 1,2,3,\ldots \text{ , където } x = 2+\sqrt{2},\ y = 2-\sqrt{2}.$$

(Начин за преминаване от върха A във върха E с n скока наричаме редица от върхове $(P_0, \ldots, P_n)$, която удовлетворява следните условия :

1) $P_0 = A$,
2) $P_n = E$,
3) за всяко i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $P_i \neq E$,
4) за всяко i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, P_i и P_{i+1} са съседни върхове на многоъгълника.)

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141